ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 10 № 2 2004

УДК 517.5

КОНКРЕТНЫЕ ЗАДАЧИ И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЭКСТРЕМУМА[1]

В. М. Тихомиров

Обсуждаются общие принципы теории экстремума и их взаимодействие с конкретными экстремальными задачами.

Математика складывается из общих теорий и конкретных результатов. По своему характеру я "конкретный" математик: наибольшее удовольствие доставляет мне знакомство с конкретным результатом (или получение такового). Это может быть теорема или точно и до конца решённая конкретная задача, но особое удовольствие доставляет мне возможность охватить на базе небольшого числа общих принципов и концепций целую достаточно массивную совокупность конкретных задач (особенно, если частным вариантам из этой совокупности были посвящены работы выдающихся математиков).

Задачами на экстремум я занимаюсь свыше сорока лет (с 1956–1957 гг.). Сначала это были задачи теории приближений. В 1962 г. состоялось моё знакомство с Алексеем Алексеевичем Милютиным. Мы много обсуждали с ним различные проблемы оптимизации. Как-то раз я стал рассказывать Милютину свой очередной результат — мне довелось решить одну, с моей точки зрения интересную, экстремальную задачу теории приближений. Милютин сказал с огорчением: "Так Вы всю жизнь будете решать отдельные задачки?"

Я устыдился и стал пытаться осмысливать некие общие принципы, на которых может зиждиться решение многих в разное время решённых "отдельно взятых" экстремальных задач, исследованных, как правило, специальными приёмами, без использования какой бы то ни было общей теории. Некоторые сюжеты на эту тему мне хотелось бы здесь обсудить.

Мне неинтересно работать одному, мне лучше работалось с друзьями и учениками. В итоге было написано несколько книг. Книги [1–5] представляются мне наиболее удачными.

Сейчас я ощущаю, что пора подводить итоги, и потому рад возможности поделиться своими мыслями о том, как представляю себе общие принципы теории экстремума и их взаимодействие с конкретными экстремальными задачами в сборнике, посвящённом восьмидесятилетию Николая Николаевича Красовского, внёсшего столь значительный вклад в теорию экстремума и её приложения. В этой статье рассматриваются некоторые проблемы, которые не раз обсуждались мною с математиками из Екатеринбурга — родного города Николая Николаевича.

Статья разбита на несколько мелких фрагментов, каждый из которых содержит вопрос, иногда формулируемый явно, иногда подразумеваемый, и обращённый к коллегам и вообще к математикам. Каждый раз мною делается попытка дать на этот вопрос свой ответ, но, разумеется, хотелось бы услышать мнение других (дополняющее, уточняющее моё или даже противоположное).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 02-01-39012 и № 02-01-00386), программ государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (НШ-304.2003.1).

1. Стоит ли заниматься экстремальными задачами?

Ответ на этот вопрос далеко не очевиден. Ведь нет специальной секции по теории экстремума в рамках математических конгрессов, участие специалистов по теории экстремальных задач на международных общематематических собраниях очень ограничено.

Но мой ответ всё-таки положителен.

Мне видятся три основных причины, которые побуждают ставить и решать задачи на максимум и минимум.

Первая из них — прагматическая, стремление человека наилучшим образом распорядиться имеющимися у него ресурсами. Это приводит к необходимости решать экстремальные задачи в экономике, технике, при управлении различными процессами.

Вторая причина — "натурфилософская", она связана с не совсем понятным свойством природы: при осуществлении природных явлений кто-то как бы решает некие задачи на минимум или максимум, так что законы природы описываются "вариационными принципами". Здесь уместно напомнить слова Л. Эйлера: "В мире не происходит ничего, в чём не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума".

Третья же причина — не вполне рационального свойства. Задачи на максимум и минимум стали решать на заре развития математики. Стимулом для древних были эстетические причины, стремление к совершенству, любознательность. Эти черты, вообще говоря, свойственны человеку во все времена, так что и поныне они дают поводы к поиску оптимальных решений. В частности, имеется несметное число *точных неравенств*, фактически решающих некоторые задачи на экстремум. Эти точные решения не способствуют развитию техники или экономики, они не объясняют явлений природы, но их с увлечением доказывали и доказывают многие математики, причём очень известные. Мы коснёмся чуть далее именно этой темы.

2. Можно ли говорить о том, что теория экстремальных задач сложилась?

Впервые словосочетание "теория экстремальных задач" я воспринял от моего рано ушедшего из жизни друга Игоря Владимировича Гирсанова, начавшего в 1962 г. читать спецкурс, материалы которого составили содержание книги [6].

В 1974 г. вышла наша с Александром Давидовичем Иоффе книга, которая так и называлась "Теория экстремальных задач". Но термин пока не установился. Публикуется множество книг, которые посвящаются либо отдельным классам экстремальных задач (вариационному исчислению, оптимальному управлению, линейному программированию и т. п.), либо специальным вопросам теории (в основном, численным методам).

Но мне хочется верить, что начала теории экстремума сформировались. В следующем пункте я постараюсь подтвердить этот тезис.

3. Каковы основные главы теории экстремума?

Экстремальные задачи изначально формулируются на языке той области знаний, откуда они родом — на языке инженерии, физики, геометрии и т. п. Для того чтобы иметь возможность исследовать их математическими средствами, необходимо осуществить перевод их на язык математики. Такой перевод называется *формализацией*.

Формализовать экстремальную задачу — значит описать *функцию* $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$, которую надо минимизировать или максимизировать (отображающую область её определения X в расширенную вещественную прямую $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \pm\infty$), и *ограничение* $C \subset X$. Ограничения, как правило, задаются равенствами и неравенствами.

Далее для задач на экстремум употребляются записи:

$$f(x) \to \min,\ x \in C, \qquad f(x) \to \max,\ x \in C, \qquad f(x) \to \ \mathrm{extr},\ x \in C; \qquad (P)$$

последняя означает, что рассматривается или задача на минимум, или задача на максимум.

По поводу каждой экстремальной задачи (P) можно поставить такие вопросы: каким условиям удовлетворяет решение? будет ли это решение устойчивым при изменении параметров задачи? существует ли решение? и как его найти? И теория экстремума состоит из следующих четырёх глав: (1) необходимые условия экстремума; (2) возмущения задачи и достаточные условия; (3) существование и (4) алгоритмы. Вся теория базируется на некоем основании, важнейшими компонентами которого являются дифференциальное исчисление и выпуклый анализ, а также активно создающийся ныне негладкий анализ.

4. Каковы же основополагающие принципы теории экстремума (принципы, которые охватывают экстремальные задачи любой природы)?

Это прежде всего *принцип Лагранжа для необходимых условий, принцип полного снятия ограничений для достаточных условий, принцип компактности для существования решений и принципы рационального спуска, штрафа и отсечения для алгоритмов поиска решений.*

Начнём обсуждение с условий экстремума.

5. Необходимые условия экстремума: теорема Ферма и принцип Лагранжа

5.1. Задачи без ограничений. Простейшей задачей на экстремум является *задача без ограничений*

$$f(x) \to \text{extr}. \tag{P_1}$$

Первый общий приём для решения (гладких) задач (P_1) для случая одного переменного был описан П. Ферма в 1638 г. (в письмах к М. Мерсенну и Ж. Робервалю) ещё до рождения анализа. На нашем современном языке он звучит так: *в точке экстремума главная линейная часть приращения функции равна нулю.* В этой форме он остаётся справедливым и в бесконечномерном случае: *если $\widehat{x}$ — точка локального экстремума функции f, дифференцируемой в точке $\widehat{x}$, то выполнено равенство*

$$f'(\widehat{x}) = 0. \tag{1}$$

В терминах производной мысль Ферма выразили создатели анализа — И. Ньютон и Г. Лейбниц, и тем не менее сейчас этот результат называют *теоремой Ферма.*

5.2. Простейшая задача вариационного исчисления. После Ферма, Ньютона и Лейбница теория экстремума совершила неожиданный переход от единицы к бесконечности, от одного переменного к бесконечному числу переменных. Это произошло в 1696 г., когда Иоганн Бернулли поставил *задачу о брахистохроне,* в которой аргументом был бесконечномерный объект — *гладкие кривые, соединяющие две заданные точки плоскости.* Впоследствии И. Бернулли поставил перед своим студентом Л. Эйлером проблему найти общий подход к задачам типа брахистохроны. Итоги своих исследований Эйлер подвёл в своём мемуаре "Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti", опубликованном в 1744 г.

Эйлер рассмотрел задачу

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to \text{extr}, \qquad x(t_0) = x_0, \qquad x(t_1) = x_1, \tag{P_2}$$

которую стали называть *простейшей задачей вариационного исчисления.* Здесь $L = L(t, x, y)$ — функция трёх переменных, называемая *интегрантом* задачи. Необходимым условием экстремума в задаче (P_2) является следующее *уравнение Эйлера*:

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \iff -\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)) + L_x(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)) = 0. \tag{2}$$

Наряду с простейшей задачей разумно рассматривать аналог задачи вариационного исчисления без ограничений, когда граничные условия отсутствуют (её называют задачей Больца):

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt + l(x(t_0), x(t_1)) \to \text{extr}, \qquad (P_2')$$

где $l = l(\xi_1, \xi_2)$ — функция двух переменных.

Для задачи Больца в качестве необходимого условия экстремума следует к уравнению Эйлера (2) присоединить *условия трансверсальности:*

$$L_{\dot{x}}(t_i, \widehat{x}(t_i), \dot{\widehat{x}}(t_i)) = (-1)^i l_{x(t_i)}(\widehat{x}(t_0), \widehat{x}(t_1)), \qquad i = 0, 1. \qquad (2')$$

5.3. Правило множителей Лагранжа. Общий принцип исследования задач с ограничениями был высказан впервые Ж. Лагранжем. В его книге Théorie des fonctions analytique (1797) есть такие слова:

"Можно высказать следующий общий принцип.

Если ищется максимум или минимум функций многих переменных при условии, что между этими переменными имеется связь, задаваемая одним или несколькими уравнениями, нужно к минимизируемой функции прибавить функции, задающие уравнения связи, умноженные на неопределённые множители, и искать затем максимум или минимум построенной суммы, как если бы переменные были независимы. Полученные уравнения, присоединённые к уравнениям связи, послужат для определения всех неизвестных."

Здесь речь идет о конечномерной задаче

$$f_0(x) \to \text{extr}, \qquad f_i(x) = 0, \qquad 1 \le i \le m. \qquad (P_3)$$

Идея Лагранжа состоит в том, что следует составить функцию (мы чуть видоизменяем сказанное Лагранжем, домножив и функционал на неопределённый множитель) $\mathcal{L}(x, \lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(x)$ (за такой функцией закрепилось имя Лагранжа, а числа $\{\lambda_i\}_{i=0}^m$ называют *множителями Лагранжа*) и написать необходимое условие в задаче без ограничений $\mathcal{L}(x, \lambda) \to \text{extr}$, $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_m)$ (т.е. применить к этой задаче без ограничений соотношение (1)). Тогда получится равенство

$$\mathcal{L}_x(\widehat{x}, \lambda) = 0 \quad \text{или, что то же,} \quad \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i'(\widehat{x}) = 0. \qquad (3)$$

Формулировка этого результата звучит так: *если в задаче* (P_3) *выполнены некоторые условия гладкости, то в точке локального экстремума* $\widehat{x}$ *выполнено равенство* (3). Этот результат называют *правилом множителей Лагранжа.*

Идею *элиминирования ограничений с помощью функции Лагранжа* сам Лагранж эвристически применял (не только в конечномерных задачах, но и в задачах вариационного исчисления) чуть ли не с 1750-х годов.

Во всех упомянутых выше книгах [1–5] я с моими соавторами старался продемонстрировать универсальность этого приёма Лагранжа, согласно которому для получения содержательного необходимого условия экстремума в задаче с ограничениями *следует составить функцию Лагранжа и затем выписать необходимое условие экстремума в задаче на экстремум функции Лагранжа, "как если бы переменные были независимы".* Этот приём в книгах [1–5] называется *принципом Лагранжа.*

Вот две иллюстрации применения принципа Лагранжа.

5.4. Задача Лагранжа вариационного исчисления. Рассмотрим задачу:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt \to \text{extr}, \qquad \dot{x} = \varphi(t, x, u), \qquad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \qquad (P_4)$$

в которой $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор фазовых переменных, $u \in \mathbb{R}^r$ — *управление*, f — вещественная функция $n+r+1$ переменного, φ — n-мерная вектор-функция тех же переменных. Задачи (P_4) называются *задачами Лагранжа вариационного исчисления.*

Воспользуемся рецептом Лагранжа. Функция Лагранжа здесь имеет вид (так её составляют со времён самого Лагранжа)[2]:

$$\mathcal{L} = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x}, u)dt, \quad \text{где} \quad L = \lambda_0 f(t, x, u) + p(t) \cdot (\dot{x} - \varphi(t, x, u)).$$

Применить необходимое условие в задаче на экстремум функции Лагранжа без ограничений — значит написать уравнение Эйлера по x и по u. В итоге приходим к уравнениям

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0, \qquad L_u = 0, \tag{4}$$

которые в разных вариантах писались, начиная с задачи о брахистохроне (1696) и вплоть до наших дней, и эти уравнения составляют основной аппарат вариационного исчисления (общая теория задач вариационного исчисления была в основных чертах завершена в сороковые годы прошлого века — итоговая книга по этой тематике опубликована в 1939 г. американским математиком Г. Блиссом).

Если предположить, что f и φ достаточно гладкие, то можно доказать теорему: *если пара* $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ *доставляет локальный экстремум в задаче* (P_4) *в* $C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times C([t_0, t_1], \mathbb{R}^r)$ *(когда учитывается близость не только фазовых координат, но и управлений; такой экстремум называют слабым), то удовлетворяются уравнения* (4).

5.5. Задача оптимального управления. Рассмотрим ту же по форме задачу, что и (P_4), но в предположении, что функция f и отображение φ определены на произведении $[t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times U$ $(U \subset \mathbb{R}^r)$, непрерывны по всем переменным и гладки по x:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt \to \text{extr}, \qquad \dot{x} = \varphi(t, x, u), \qquad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1. \tag{P_5}$$

Задачу (P_5) называют *задачей оптимального управления.* Такие задачи стали исследовать на семинаре Л.С. Понтрягина в пятидесятые годы прошлого века. Их рассматривают на сильный экстремум, когда учитывается лишь близость фазовых координат, но не близость управлений.

Множество U в (P_5) может быть произвольным, например, состоящим из конечного числа точек. Методы гладкого анализа, которые приводят к уравнениям (2), здесь не применимы. Но принцип Лагранжа сохраняет свою силу.

Функция Лагранжа задачи (P_5) та же, что и в предыдущем примере:

$$\mathcal{L} = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x}, u)dt, \qquad L = \lambda_0 f(t, x, u) + p(t) \cdot (\dot{x} - \varphi(t, x, u)).$$

Чтобы применить общую идею Лагранжа, естественно рассмотреть две задачи, закрепляя сначала $\widehat{u}(\cdot)$ и минимизируя по $x(\cdot)$, а затем закрепляя $\widehat{x}(\cdot)$ и минимизируя по $u(\cdot)$.

В первом случае задача минимизации относится к числу простейших задач вариационного исчисления, и необходимое условие в ней — это уравнение Эйлера по x:

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0. \tag{5}$$

[2]Если p — вектор-строка, а x — вектор-столбец, то через $p \cdot x$ мы обозначаем сумму $\sum p_i x_i$.

Во втором случае получается задача

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), u(t))dt \to \min, \qquad (P_5')$$

где минимум берётся по $u(\cdot)$, и при этом надо учитывать, что $u(t) \in U$. Очень легко понять, что (при самых широких допущениях) критерием минимальности $\widehat{u}(\cdot)$ является "принцип минимума":

$$\min_{u \in U} L(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), u) = L(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), \widehat{u}(t)). \qquad (5')$$

Если поменять знаки, то приходим к необходимому условию для задачи (P_5), которое формулировалось в школе Понтрягина:

$$\max_{u \in U}(p(t) \cdot \varphi(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), u) - \lambda_0 f(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), u))$$
$$= \max_{u \in U}(p(t) \cdot \varphi(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), \widehat{u}(t)) - \lambda_0 f(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), \widehat{u}(t)). \qquad (5'')$$

Сочетание соотношений (5) и (5″) называют *принципом максимума Понтрягина.*

Применение принципа максимума к простейшей вариационной задаче приводит к необходимым условиям Лежандра и Вейерштрасса, а применение этого принципа ко второй вариации функционала простейшей задачи приводит к необходимому условию Якоби.

Принцип Лагранжа — основной приём, с помощью которого будут далее обсуждаться конкретные задачи. Но кратко опишем и остальные принципы, названные в п. 4.

6. Возмущения экстремальных задач и принцип полного снятия ограничений

Включение задачи в семейство задач, зависящее от каких-то параметров, называется *возмущением* задачи. Первым математиком, осознавшим полезность возмущений при построении теории вариационного исчисления, был У. Гамильтон. Он писал: "Следует сравнивать динамически возможные движения, варьируя крайние положения системы". Путеводной нитью для него была оптика, распространение света в неоднородной среде. Представляя себе мысленно пучок света, исходящего из одной точки, Гамильтон в 1836 г. наряду с *траекториями лучей света* (удовлетворяющими вариационному принципу Ферма), стал рассматривать *волновые фронты* — линии уровня S-функции ($S(x)$ - время достижения светом заданной точки x пространства). "Варьируя крайние положения системы", он выписал уравнение в частных производных для S-функции в оптике. Годом позже К. Якоби применил идеологию Гамильтона к любым задачам вариационного исчисления. Уравнение для S-функции простейшей задачи $S(\tau, x) = \inf\{J(x(\cdot)) \mid x(t_0) = x_0,\ x(\tau) = x\}$, имеющее вид

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t, x) + \mathcal{H}(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}(t, x)) = 0,$$

где $\mathcal{H}(t, x, y) = \sup\{yu - L(t, x, u) \mid u \in \mathbb{R}\}$ — преобразование Лежандра функции L, называется ныне *уравнением Гамильтона — Якоби.* Уравнение Гамильтона — Якоби позволяет выразить приращение функционала J на экстремали через функцию Вейерштрасса, и это приводит к достаточным условиям в вариационном исчислении, которые при условии регулярности интегранта (т.е. выпуклости его по последнему аргументу) состоят в усиленных условиях Лежандра и Якоби (когда неравенство в условии Лежандра строгое и сопряжённой точки нет на всём отрезке $[t_0, t_1]$).

Но на самом деле можно высказать нечто общее не только относительно простейшей задачи на экстремум. Метод возмущения в невырожденных случаях приводит к некоему обобщению принципа Лагранжа, который естественно назвать *обобщённым принципом Лагранжа, или принципом полного снятия ограничений.* Его можно сформулировать так: *для невырожденных (в окрестности локального экстремума) задач на экстремум с ограничениями можно так "слегка" изменить функцию Лагранжа, что в точке экстремума будет достигаться локальный экстремум без ограничений.*

7. Принцип компактности и существование решений

"Я убежден, что будет возможно доказывать теоремы существования с помощью общего принципа, чья сущность навеяна принципом Дирихле. Этот общий принцип, возможно, приблизит нас к ответу на следующий вопрос: имеет ли решение каждая регулярная вариационная проблема, если самому понятию "решение" при случае придавать расширенное толкование?".

Это глубокое высказывание Д. Гильберта прозвучало при формулировании им двадцатой проблемы на конгрессе в Париже (1900). Общий принцип, о котором говорит Гильберт, — это, безусловно, *принцип компактности Вейерштрасса — Лебега — Бэра*, согласно которому *полунепрерывная снизу на компакте функция достигает своего минимума.*

Применение этого принципа проиллюстрируем на той же простейшей задаче, о которой постоянно шла у нас речь.

В одномерном случае (когда x — одномерный вектор) естественно в качестве пространства, на котором рассматривается задача (P_2), выбрать в некотором отношении максимальное пространство, на котором сама задача может ставиться. А таковым можно считать пространство абсолютно непрерывных функций (или пространство $W_1^1([t_0,t_1])$. Регулярность интегранта гарантирует полунепрерывность снизу, а условие роста (интегрант по последнему аргументу должен расти быстрее линейной функции) и ограниченность снизу интегранта гарантируют компактность, а значит, в силу принципа компактности, и существование. Так формулируются многочисленные теоремы существования, начиная с работ Л. Тонелли двадцатых годов прошлого века.

Но в многомерных задачах естественного "самого широкого" пространства нет. И здесь стали строить пространства, которые разумно соответствуют интегрантам задачи. Например, в задаче Дирихле в области Ω таким пространством является, безусловно, соболевское пространство $W_2^1(\Omega)$. Так возникли *обобщённые функции.* А для решения вариационных задач прямыми методами (о которых кратко скажем в следующем пункте), начали разрабатывать теорию *вложения функциональных пространств.* Сам же стиль теорем существования остался тем же: если пространство строится по интегранту L, который гарантирует полунепрерывность и компактность, то имеет место существование решения. Во многих важных случаях полунепрерывность следует из регулярности, компактность из роста интегранта, а граничные условия должны браться из пространства, которое вкладывается в исходное (в задаче Дирихле на круге D это будет пространство $W_2^{1/2}(\partial D)$ на окружности).

8. Принципы алгоритмов оптимизации

"Таким образом, дело сводится к решению легкой задачи: даны две точки A и C и проходящая между ними горизонтальная прямая DE; требуется найти на этой прямой точку B, чтобы путь ABC был наискорейшим". (Имеется в виду наискорейший спуск материальной точки по ломаной ABC под действием силы тяжести.) Здесь процитировано письмо Лейбница Иоганну Бернулли от 31 июля 1696 г. по поводу брахистохроны.

Эта цитата из Лейбница возвращает нас к истокам. Вариационное исчисление, как было сказано, родилось "из брахистохроны" — задачи, к решению которой И. Бернулли "приглашал" современных ему математиков. Решение (помимо самого Иоганна) представили его брат Якоб, ученик Иоганна Лопиталь, а также праотцы всей современной математики Ньютон и Лейбниц.

В этих решениях были зёрна тех идей, которые питали и питают теорию экстремума от самых истоков до наших дней. Иоганн Бернулли решил задачу, базируясь на оптико-механической аналогии, которая вдохновила Гамильтона и Якоби на построение их теории; Якоб Бернулли воспользовался принципом Гюйгенса, также составившим важнейший компонент теории Гамильтона — Якоби. А Лейбниц, как мы видим из приведённой выше цитаты, заложил основания "прямых методов", заменив бесконечномерный объект (кривую) конечно-параметрическим (ломаной).

Продолжил дело Лейбница Эйлер, который вывел уравнение Эйлера, заменяя кривую ломаными. А в наше время редукция к конечномерным задачам — основной подход к численному решению задач на экстремум. После редукции применяют методы целесообразного спуска (для задач минимизации): градиентный метод и всевозможные его модификации, метод сопряжённых направлений и т.д. и т.п., к этому же классу относятся симплекс-метод Данцига, разнообразные методы штрафа, барьерные методы, в выпуклых задачах — методы отсечений. Сказать здесь обо всём этом подробно не представляется возможным.

9. Как доказываются основные теоремы теории экстремальных задач?

Выше были описаны общие принципы теории, и при этом формулировались некоторые теоремы. Что же это за теоремы в общей теории экстремума? Важнейшие из них — это *теоремы существования*, которые звучат так: *если выполнены такие-то и такие-то условия, то существуют: множители Лагранжа (если речь идёт о различных формах принципа Лагранжа), поля экстремалей (если речь идёт о достаточных условиях в вариационном исчислении), возмущение функции Лагранжа (если речь идёт о принципе полного снятия ограничений), сами решения (если речь идёт о теории существования).*

Но имеется (сравнительно небольшой) набор самих *принципов существования* (и методов нахождения решений уравнений). Назовем важнейшие (с моей точки зрения) из них: метод Ньютона решения уравнений; принцип сжимающих отображений Каччополи — Банаха; топологические принципы (Брауэра, Борсука, Люстерника — Шнирельмана и т.п.); принципы, основанные на монотонности (Минти — Браудера и т.п.); порядковые принципы существования (например, принцип Г. Биркгофа); принцип Бэра; вариационный принцип Экланда.

Наконец, мы переходим ко второй теме: *взаимоотношение конкретных задач и общей теории.*

10. Зачем ставятся и решаются конкретные задачи?

Освещение одной стороны этой проблемы можно найти в словах И. Бернулли, сказанных им при постановке всё той же задачи о брахистохроне: "Ничто с такой силой не побуждает высокие умы к работе над обогащением знания, как постановка трудной и в то же время полезной задачи."

Но меня больше увлекает обратная связь: я воспринимаю собрания экстремальных задач, как *полигон для общей теории.* И если вы посмотрите на книги [1–5], написанные с моим участием, вы увидите в каждой из них множество конкретных задач или неравенств (перечислю некоторые: задачи Аполлония, Дидоны, Евклида, Кеплера, простейшую задачу о быстродействии, задачи Ньютона, Улама, Годдарда, Торричелли — Штейнера и множество других из алгебры, геометрии, механики, физики, математического анализа — скажем, неравенства Адамара, Харди, Надя и др.).

11. Неравенства Ландау — Колмогорова

Остановимся здесь на том, как справляется общая теория с решением одного достаточно обширного семейства экстремальных задач-неравенств и что́ осмысление этих решений может привнести в общую теорию. Речь идёт о так называемых *неравенствах Ландау — Колмогорова на прямой и полупрямой*:

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)} \le K\|x(\cdot)\|^{\alpha}_{L_p(T)}\|x^{(n)}(\cdot)\|^{1-\alpha}_{L_r(T)}, \tag{P_6}$$

где $T = \mathbb{R}$ или $\mathbb{R}_+$; $\alpha = \frac{n-k-r^{-1}+q^{-1}}{n-r^{-1}+p^{-1}} > 0$; $n \in \mathbb{N}$; $k \in \mathbb{Z}_+$ и $0 \le k \le n-1$; $1 \le p,q,r \le \infty$. Неравенства (P_6) рассматриваются в пространстве $\mathcal{W}^n_{pr}(T)$ функций $x(\cdot)$ из $L_p(T)$ с $(n-1)$-й производной, локально абсолютно непрерывной на T и такой, что $x^{(n)}(\cdot)$ принадлежит $L_r(T)$.

При фиксированном T неравенства (P_6) зависят от пяти параметров: n, k, p, q, r. Обозначим наилучшую возможную константу в этом неравенстве через $K_T(n,k,p,q,r)$ и назовём её *константой Колмогорова*.

Точные неравенства (P_6) привлекали к себе внимание многих исследователей в течение многих десятилетий. Первой работой, посвящённой этим неравенствам, называют обычно статью Э. Ландау 1913 г., который доказал, что $K_{\mathbb{R}_+}(2,1,\infty,\infty,\infty) = 2$. В следующем году Ж. Адамар вычислил константу $K_{\mathbb{R}}(2,1,\infty,\infty,\infty) = \sqrt{2}$. Множество неравенств типа (P_6) содержатся в замечательной книге Харди — Литтлвуда — Пойа "Неравенства" (1934). В частности, эти авторы нашли колмогоровскую константу для произвольных $n \ge 2$, $0 < k < n$ и $p = q = r = 2$ (такого рода результаты мы будем называть *общими неравенствами*). В книге "Неравенства" доказано, что $K_{\mathbb{R}}(n,k,2,2,2) = 1$. А.Н. Колмогоров в 1938 г. вычислил константу $K_{\mathbb{R}}(n,k,\infty,\infty,\infty)$ для $n \ge 2$, $0 < k < n$. Этот результат остаётся, пожалуй, наиболее замечательным во всём цикле неравенств (P_6), и в этом, по-видимому, кроется причина того, что точные неравенства вида (P_6) часто называют *неравенствами Колмогорова* или *неравенствами Ландау — Колмогорова*.

При обсуждении этой проблематики я буду опираться на три работы [7–9], написанные совместно с моими учениками.

12. Принцип Лагранжа и неравенства Ландау — Колмогорова

В этом пункте обсудим принцип Лагранжа как аппарат решения задач о неравенствах для производных на прямой и полупрямой.

В работах [7–9] мы придерживались такой схемы:

1. Формализация задачи. 2. Приложение к ней принципа Лагранжа. 3. Исследование уравнений и/или неравенств, следующих из принципа Лагранжа. 4. Выписывание ответа.

Как правило, принцип Лагранжа, применённый эвристически (без ссылки на точно доказанные теоремы), будет приводить к некоторому тождеству (обычно мы называем его *основным тождеством*). После выписывания его (в соответствии с принципом Лагранжа) оказывается возможным доказать тождество непосредственно. А само тождество приводит к решению задачи.

Проиллюстрируем сказанное на примере.

12.1. Пример. Рассмотрим, пожалуй, простейшую задачу о неравенствах Ландау — Колмогорова, когда $T = \mathbb{R}_+$, $p = r = 2$, $q = \infty$, $k = 0$, $n = 1$. Этот пример связан с двумя именами: Б. Сёкефальви-Надя и В.Н. Габушина. Надь нашёл колмогоровскую константу $K_{\mathbb{R}_+}(1,0,p,q,r)$ для произвольных p,q и r, а Габушин исследовал общий случай $p = r = 2$, $q = \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \le k < n$.

1. Формализация.

$$x(0) \to \max, \qquad \int\limits_{\mathbb{R}_+} x^2(t)\,dt \le \delta^2, \qquad \int\limits_{\mathbb{R}_+} \dot{x}^2(t)\,dt \le 1. \tag{i}$$

Это — изопериметрическая задача вариационного исчисления.

2. Принцип Лагранжа. Функция Лагранжа задачи (i) имеет вид:

$$\mathcal{L}(x(\cdot),\lambda) = -\lambda_0 x(0) + \lambda_1 \int_{\mathbb{R}_+} x^2(t)\,dt + \lambda_2 \int_{\mathbb{R}_+} \dot{x}^2(t)\,dt,$$

где $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda_i \geq 0$, $i = 0,1,2$. Следуя основной идее Лагранжа, нужно применить необходимое условие минимума к простейшей задаче вариационного исчисления:

$$\mathcal{L}(x(\cdot),\lambda) = -\lambda_0 x(0) + \lambda_1 \int_{\mathbb{R}_+} x^2(t)\,dt + \lambda_2 \int_{\mathbb{R}_+} \dot{x}^2(t)\,dt \to \min, \qquad (ii)$$

т. е. выписать в задаче (ii) уравнение Эйлера и условия трансверсальности (см. (2) и (2′)):

$$-2\lambda_2 \ddot{\widehat{x}}(t) + 2\lambda_1 \widehat{x}(t) = 0, \qquad 2\lambda_2 \dot{\widehat{x}}(0) = -\lambda_0. \qquad (iii)$$

Отметим здесь, что эти соотношения — не что иное, как результат интегрирования по частям тождества

$$\mathcal{L}_{x(\cdot)}(\widehat{x}(\cdot),\lambda) = 0 \iff -\lambda_0 x(0) + \lambda_1 \int_{\mathbb{R}_+} (\widehat{x}(t)x(t) + \lambda_2 \int_{\mathbb{R}_+} \dot{\widehat{x}}(t)\dot{x}(t))\,dt = 0 \quad \forall x(\cdot), \qquad (iv)$$

представляющего собой применение основной идеи Лагранжа о том, что следует применить необходимое условие минимума к функции Лагранжа, "как если бы переменные были независимы" (мы выписали функцию Лагранжа и применили теорему Ферма).

3. Исследование. Оба множителя Лагранжа должны быть положительны (например, если $\lambda_2 = 0$, тогда $\lambda_1 = \lambda_0 = 0$, что невозможно). Значит, можно положить $\lambda_0 = 1$. Общее решение уравнения Эйлера, убывающее на бесконечности, имеет вид: $x(t, C, \lambda_1, \lambda_2) = C\exp(-\sqrt{\lambda_1/\lambda_2}\,t)$. Числа C, λ_1, λ_2 определяются из изопериметрических условий:

$$C^2 \int_{\mathbb{R}_+} \exp\left(-2\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}t\right) dt = \delta^2, \qquad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} C^2 \int_{\mathbb{R}_+} \exp\left(-2\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}t\right) dt = 1$$

и условия трансверсальности $2\lambda_2\dot{\widehat{x}}(0) = -1$. В итоге получаем: $\widehat{x}(t) = \sqrt{2\delta}\exp(-t/\delta)$, $\lambda_1 = (2\delta)^{-3/2}$, $\lambda_2 = 2^{-1}(\delta/2)^{1/2}$. Подставляя $\widehat{x}(\cdot)$, λ_1 и λ_2 в соотношение (iv), приходим к основному тождеству:

$$x(0) = \frac{1}{\delta}\int_{\mathbb{R}_+} e^{-t/\delta}x(t)\,dt - \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t/\delta}\dot{x}(t)\,dt.$$

Легко проверить интегрированием по частям, что это тождество на самом деле справедливо для любых функций $x(\cdot)$ из $\mathcal{W}^1_{22}(\mathbb{R}_+)$. Теперь из неравенства Коши — Буняковского получаем: $|x(0)| \leq \sqrt{2\delta}$ для всех допустимых $x(\cdot)$ в задаче (i), и для $\widehat{x}(\cdot)$ выполнено равенство $|\widehat{x}(0)| = \sqrt{2\delta}$. Итог:

4. Функция $\widehat{x}(\cdot) = \widehat{x}(\cdot,\delta)$ является решением задачи (i) и

$$K_{\mathbb{R}_+}(1,0,2,\infty,2) = \widehat{x}(0,1) = \sqrt{2}.$$

Пройдёмся бегло по другим точным решениям задач о неравенствах для производных на прямой и полупрямой.

12.2. Задачи малой гладкости. Наибольшее число точных решений было получено в случаях, когда $n = 1$ или 2. Здесь было найдено не меньше двадцати решений, и многие из них (все, кроме одного, из тех, которые я со своими учениками брался обдумывать) были исследованы до конца при помощи принципа Лагранжа примерно так же, как в только что описанном примере, и при этом обычно открывались богатые возможности для обобщений.

Вкратце обсудим те причины, которые позволяют в разбираемых далее примерах добраться до цели (детали можно проследить по книге [4] и статье [9]).

При $n = 1$ интегранты изопериметрической задачи не зависят от независимого переменного и потому допускают интеграл энергии, позволяющий в принципе проинтегрировать уравнения Эйлера. Более того, если $q = \infty$, задачи оказываются выпуклыми и тогда необходимые условия совпадают с достаточными, так что, собственно говоря, нужно только проинтегрировать уравнения. Если ещё раз вернуться к разобранному примеру, то можно убедиться, что именно всё это и было проделано.

Случай $q < \infty$ будет обсуждаться далее вместе с общими проблемами, сопутствующими конкретным задачам.

Несколько замечательных решений было получено при $n = 2$, $q = \infty$. Здесь решения зависят от двух параметров p и r (для каждой области $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}_+$), и потому каждой задаче можно сопоставить точку $(1/p, 1/r)$, $0 \le 1/p$, $1/r \le 1$, единичного квадрата. Так вот, точные решения были найдены для центра квадрата и для точек его границы.

О центре квадрата будет сказано отдельно (ибо для него можно получить "общие решения" при $n \ge 2$ для любых $0 \le k \le n-1$). А здесь мы вкратце коснёмся "периферийных решений". Во всех случаях принцип Лагранжа приводит к основному тождеству, позволяющему исследовать задачу до конца.

Для левой стороны квадрата константа Колмогорова $K_{\mathbb{R}_+}(2, 1, \infty, \infty, r)$ равна

$$2^{\frac{1}{r'+1}} \left(\frac{r'+1}{r'}\right)^{\frac{r'}{r'+1}}$$

(при $r = \infty$ она была найдена другими методами Э. Ландау, а для $r < \infty$ — В.В. Арестовым). К этому результату можно прийти, применяя принцип Лагранжа, что позволяет явно выписать основное тождество, проверяемое затем непосредственно. Из основного тождества сразу получаем ответ.

Верхняя граница квадрата состоит из задач, двойственных задачам Ландау — Арестова, и это опять-таки даёт возможность явно выписать основное тождество, приводящее к нахождению константы Колмогорова $K_{\mathbb{R}_+}(2, 0, p, \infty, 1) = (p+1)^{\frac{1}{p+1}}$ (этот результат был получен Магарил-Ильяевым).

Решения задач на нижней стороне квадрата были получены (не прибегая к принципу Лагранжа) специалистом по теории управления А. Фуллером и В.Н. Габушиным (В.В. Арестов и В.Н. Габушин — представители екатеринбургской школы С.Б. Стечкина, с участниками которой меня связывает более чем тридцатилетнее сотрудничество). Здесь удаётся решить задачу явно, благодаря тому, что, с одной стороны, уравнения принципа Лагранжа имеют интеграл, позволяющий понизить порядок уравнений, а с другой — эти уравнения имеют группу преобразований, сохраняющих их форму.

Правая сторона квадрата двойственна нижней стороне, что даёт ключ к нахождению решений (это также было осуществлено Магарил-Ильяевым).

Здесь представляется разумным обсудить такой вопрос: а что это значит, что та или иная задача решена *точно*?

Разберём несколько частных случаев задач, расположенных на нижней стороне квадрата.

При $p = 2$ уравнения, составленные в соответствии с принципом Лагранжа, действительно удаётся разрешить явно. Константа Колмогорова $K_{\mathbb{R}_+}(2, 0, 2, \infty, \infty)$ оказывается равной $5^{2/5}2^{-3/5}(3\sqrt{33}+3)^{1/10}$. В работах Фуллера и Габушина такого ответа приведено не было: описывалось решение, которое зависело от параметров; для их нахождения выписывалась система уравнений и доказывалась её разрешимость. И мы выписали некие уравнения, исходя из принципа Лагранжа (см. [4, стр. 118–119]). Как-то слушатель моих лекций (тогда студент, а ныне активно работающий математик В. Тиморин) попросил задачу для досрочной сдачи экзамена. Я предложил ему найти константу $K_{\mathbb{R}_+}(2, 0, 2, \infty, \infty)$. Тиморин составил компьютерную программу и принёс мне число: 1.69659. Я был в затруднении: как проверить правильность ответа? И тогда мы с Кочуровым решили найти ответ при помощи компьютерной программы "Математика". Набрали на компьютере уравнения, нажали на *Enter* — и к нашему удивлению получили не численный результат, а формулу $5^{2/5}2^{-3/5}(3\sqrt{33}+3)^{1/10}$! Нашли с помощью той же "Математики" численное значение этого выражения, и оно совпало с числом, полученным Тимориным. (Мы сразу поняли, что наши уравнения можно было бы явно решить и нам самим; просто мы не решались это делать: уравнения выглядели устрашающе.)

Так что же считать "явным решением задачи": выписывание уравнений, число 1.69659, найденное компьютерным способом, или всё-таки "явную формулу" $5^{2/5}2^{-3/5}(3\sqrt{33}+3)^{1/10}$? Оставим этот вопрос без ответа — мне бы хотелось выслушать мнение коллег, — но чуть ещё продолжим обсуждение. Для того чтобы найти число $K_{\mathbb{R}_+}(2,0,4,\infty,\infty)$, надо найти корень полинома $56x^5+412x^4-11599x^3+59220x^2-98000x-78400$, а для вычисления $K_{\mathbb{R}_+}(2,0,3/2,\infty,\infty)$ требуется найти решение такого трансцендентного уравнения: $\frac{-4x}{x^4-1}+3\left(\pi+2\operatorname{arctg}x+\log\frac{x+1}{x-1}\right)=0$ (всё это выдала нам "Математика"). Я бы склонился (при ответе на вопрос о "явных решениях") к эклектике: конечно, лучше всего получить явную формулу; если это не удаётся, то разумно искать приближенное значение искомого числа, а на худой конец сойдут и уравнения, если примерно ясно, как их решать.

Но если коллеги согласятся с последним, то можно предпринять попытку решить *все* задачи (P_6) в этом расширенном смысле!

12.3. Общие решения. В небольшом числе случаев были получены "общие решения" при фиксированных p,q,r и произвольных n и k. Апеллируя снова к принципу Лагранжа, поясним причины, которые приводят к цели в этих случаях (детали можно прочитать в книге [4] и статье [8]).

В случае Харди — Литтлвуда — Пойа ($T=\mathbb{R}$, $p=q=r=2$) преобразование Фурье сводит задачу о вычислении колмогоровской константы к проблеме линейного программирования. В случае Тайкова ($T=\mathbb{R}$, $p=r=2$, $q=\infty$) преобразование Фурье редуцирует задачу к линейно-квадратичной легко разрешимой проблеме. Габушинский случай $T=\mathbb{R}_+$, $p=r=2$, $q=\infty$ (центр квадрата, о котором упоминалось) принцип Лагранжа сводит к линейной системе дифференциальных уравнений. В колмогоровском случае удаётся явно выписать основное тождество. Во всех четырех случаях задача выпуклая и необходимое условия совпадают с достаточными.

В случае Любича — Купцова ($T=\mathbb{R}_+$, $p=q=r=2$) принцип Лагранжа приводит также к линейным уравнениям, но здесь приходится апеллировать к достаточным условиям.

Единственный случай, перед которым принцип Лагранжа пасует — это случай Стейна ($T=\mathbb{R}$, $p=q=r=1$). Но он редуцируется к колмогоровскому случаю.

13. Обсуждения и открытые проблемы

Принцип Лагранжа даёт возможность не только до конца и единым способом исследовать большинство задач на экстремум, но и значительно обобщить многие результаты. Это демонстрируется в статьях и книгах [1–9], упоминавшихся выше, а также в работах, находящихся в стадии подготовки (такова, например, статья под заголовком ""Неравенства" Харди — Литтлвуда — Пойа 70 лет спустя", где демонстрируется принцип Лагранжа как способ единообразного решения большинства неравенств классической книги).

Однако исследование конкретных задач (в частности, точных неравенств) позволяет пересмотреть некоторые вопросы в уже сложившихся частях общей теории. Обсудим некоторые темы, отправляясь от контекста неравенств Ландау — Колмогорова.

Вот некоторые открытые проблемы.

Проблемы, связанные с неравенствами на некомпактных множествах – прямой и полупрямой. Теория таких задач разработана недостаточно.

К примеру, мне с моими коллегами не удалось найти в литературе никакой общей теоремы для доказательства существования экстремальной функции в неравенствах для производных, и нам пришлось самим доказывать такую теорему (см. [6]).

В этой теореме принцип компактности, который обычно присутствует в большинстве теорем существования, требует дополнения: наше доказательство основано на том, что минимизирующим последовательностям "невыгодно рассредотачиваться". Таким образом,

1. Теория существования решений задач, в которых аргумент принадлежит некомпактным множествам (особенно в многомерных случаях) должна быть существенно дополнена.

Имеются и другие вопросы, связанные с некомпактностью. Например,

2. Как описать "условия на бесконечности" в задачах с некомпактностью?

При интегрировании уравнений Эйлера или уравнений принципа максимума (скажем, в задаче Фуллера — Габушина, о которой речь шла выше) возникают многие дополнительные трудности, связанные с отсутствием устойчивости решений на бесконечных интервалах. И потому желательно

3. Эффективно развить численные методы интегрирования граничных задач на бесконечных областях.

Даже в простейших изопериметрических (невыпуклых) задачах, где требуется применять достаточные условия, нет удобной теории, которая позволяла бы исследовать, скажем, задачу Надя ($n = 1$, $q \neq \infty$) стандартно и без преодоления особых трудностей. Так что

4. Следует дополнить теорию решений граничных задач, возникающих при применении принципа Лагранжа в неограниченных областях.

5. Упомянем ещё огромный мир многомерных задач. Уже задачи типа (P_6) с частными производными (по стилю сходные с задачами (P_5)) в многомерном случае могут служить примером, когда в огромном многопараметрическом семействе нет решений, за исключением нескольких случайных. Там прежде всего нужно было бы разработать нечто вроде принципа Лагранжа.

Но если в одномерном случае будут доказаны содержательные теоремы существования, описаны граничные условия на бесконечности, разработаны методы интегрирования почти всех (кроме вырожденных) граничных задач, возникающих после применения принципа Лагранжа, описаны достаточные условия, подтверждающие, что численные решения действительно являются решениями поставленных задач, наконец, если будет разработана стандартная программа, позволяющая находить значения колмогоровских констант простым нажатием кнопки после набора параметров задачи, вот тогда можно ли будет сказать, что *(почти) все* задачи о неравенствах Ландау — Колмогорова решены и больше они ничего не могут дать для общей теории?

Поступила 09.04.04

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] **Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.** Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

[2] **Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.** Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.

[3] **Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М.** Сборник задач по оптимизации. М.: Наука, 1984.

[4] **Магарил-Ильяев В.М., Тихомиров В.М.** Выпуклый анализ и его приложения. М.: Эдиториал УРСС, 2003.

[5] **Тихомиров В.М.** Рассказы о максимумах и минимумах. М.: Наука, 1986.

[6] **Гирсанов И.В.** Лекции по математической теории экстремальных задач. М.: Изд-во МГУ, 1970.

[7] **Буслаев А.П., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.** О существовании экстремальных функций в неравенствах для производных // Мат. заметки. 1982. Т. 32, № 6. С. 823–834.

[8] **Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.** О неравенствах для производных колмогоровского типа // Мат. сб. 1997. Т. 188, № 12. С. 73–106.

[9] **Kochurov A.C., Magaril-Il'yaev G.G., Tikhomirov V.M.** Inequalities for derivatives on a line and a half-line and problems of recovery of functionals // East J. Approxim. 2004. V. 10. No. 1–2. P. 232–260.